Über Gruppen vom Rang Null.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

vorgelegt von

Robert Rapp

Oberreallehrer in Dornstetten.

Borna-Leipzig

Buchdruckerei Robert Noske

1914.

Von der Fakultät angenommen den 14. Februar 1914.

Referent: Professor Dr. Maurer.

Meinem hochverehrten Lehrer
Herrn Professor DR. L. MAURER
in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553613_0011

Einleitung.

Seit dem Erscheinen des grundlegenden Werkes von S. Lie[1]) über die kontinuierlichen Transformationsgruppen ist diese Theorie Gegenstand vielfacher Untersuchungen gewesen.

Die wichtigsten Resultate, die hierbei seit dem Tode Lies bis zum Jahr 1907 erhalten wurden, sind von Ugo Amaldi[2]) zusammengestellt worden.

Killing[3]) hat an die Spitze seiner Untersuchungen die „charakteristische Determinante" gestellt und dabei den Begriff des „Rangs einer Gruppe" eingeführt.

Die Gruppen vom Rang Null spielen nun in der Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen eine hervorragende Rolle.

Killing hat nämlich den Satz aufgestellt, daß jede Gruppe sich zusammensetzen läßt aus einfachen Gruppen und aus Gruppen vom Rang Null. Abgesehen von einigen Ausnahmen gibt es für jeden Rang l 4 Typen einfacher Gruppen von der Ordnung $l(l+2)$, $l(2l+1)$, $l(2l-1)$ und $l(2l+1)$, die bezw. isomorph sind mit der projektiven Gruppe des R_l, der Gruppe einer quadratischen Mannigfaltigkeit in $2l+1$ und in $2l$ Variabeln, endlich der Gruppe eines linearen Komplexes im R_{2l}.

Umlauf[4]) hat in seiner Dissertation alle Typen von Zusammensetzungen der Gruppen vom Rang Null bestimmt, bis zu den Gruppen mit 6 Parametern sowie diejenigen der G_7 bis G_9, bei welchen $(X_0 X_k) = X_{k+1}$.

---

[1]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 1—3.

[2]) Annali di Matematica Serie 3 Bd. 15.

[3]) Mathematische Annalen Bd. 31, 33, 34, 36.

[4]) Über die Zusammensetzung der endlichen, kontinuierlichen Transformationsgruppen, Diss. Leipzig 1891.

Zwei verschiedene Zusammensetzungen werden dann und nur dann als verschiedene Typen von Zusammensetzungen betrachtet, wenn es nicht möglich ist, durch geeignete Wahl der unabhängigen infinitesimalen Transformationen die eine in die andere überzuführen.

Umlauf geht hierbei von dem Satze aus, daß jede r gliedrige Gruppe vom Rang Null und der Zusammensetzung

$$(1) \qquad (X_i X_k) = \sum_{s=k+1}^{r-1} c_{iks} X_s f$$

$$i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots r-2$$

$$k = i+1, i+2, \ldots r-1$$

wenigstens eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation $X_{r-1} f$ besitzt, und daß man eine $r-1$ gliedrige, isomorphe Gruppe vom Rang Null erhält, sobald man in der r gliedrigen Gruppe $X_{r-1} \equiv 0$ setzt.

Er findet dann alle Typen von Zusammensetzungen der G_r vom Rang Null, indem er von den Typen der Zusammensetzungen der G_{r-1} ausgeht und zu allen Relationen $(X_i X_k)$ der G_{r-1} ein Glied $a_{ik} X_r$ hinzufügt und dann die a_{ik} so bestimmt, daß die Jakobische Identität

$$(X_i X_k X_j) = 0$$

erfüllt ist.

Ausgehend von den Umlaufschen Resultaten hat sich nun die folgende Arbeit die Aufgabe gestellt, den Umlaufschen Gruppenzusammensetzungen entsprechende Gruppen vom Rang Null in „endlicher Form“ zu finden, nämlich die Parametergruppe.

Die erhaltenen Resultate, die in § 4 zusammengestellt sind, bilden eine Ergänzung der wenigen, bis jetzt bekannten endlichen, kontinuierlichen Transformationsgruppen, die für weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet von Wert sein können.

Der in § 2 bewiesene Satz, daß es zu jeder Gruppe vom Rang Null eine gleichzusammengesetzte, in den Variabeln lineare und homogene Gruppe gibt, läßt uns ferner den mit der Theorie der Formen bestehenden Zusammenhang erkennen.

Die Tabelle von Umlauf kann aber durch folgende Überlegung wesentlich vereinfacht werden. Angenommen, die erzeugenden infinitesimalen Transformationen einer r gliedrigen Gruppe G lassen sich so wählen, daß r_1 derselben eine r_1 gliedrige Gruppe G_1 und r_2 derselben eine r_2 gliedrige Gruppe G_2 erzeugen, wobei $r_1 + r_2 = r$, und daß überdies jede infinitesimale Transformation von G_1 mit jeder infinitesimalen Transformation von G_2 vertauschbar ist, so wollen wir die Gruppe G „zerlegbar“ nennen.

Kennt man alle Typen von unzerlegbaren Gruppen, deren Gliederzahl $< r$ ist, so kennt man ohne weiteres auch alle Typen von zerlegbaren r gliedrigen Gruppen.

In der Tabelle von Umlauf fallen deshalb folgende als zerlegbar weg:

$r = 2$ I
$r = 3$ II
$r = 4$ II, III
$r = 5$ VI, VIII, IX
$r = 6$ 2. 2, 4, 11, 21, 26, 27; 3. 1, 2, 4; 4. 1.

Folgender Gesichtspunkt führt uns endlich zu einer neuen, interessanten Aufgabe.

Jede Gruppe vom Rang Null enthält infinitesimale Transformationen, die mit allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind. Es seien dies die infinitesimalen Transformationen $X_{r-\varrho}, X_{r-\varrho+1}, \ldots X_{r-1}$.

Wir erhalten nun eine zur vorgelegten Gruppe meriedrisch isomorphe Gruppe mit der Gliederzahl $r - \varrho$, wenn wir

$$c'_{ikh} = \begin{cases} c_{ikh} \text{ für } h \leqq r - \varrho - 1 \\ 0 \text{ für } h = r - \varrho, r - \varrho + 1, \ldots r - 1 \end{cases}$$

setzen.

Lie nennt diese Gruppe eine „verkürzte“ Gruppe. Ihr Rang ist selbstverständlich ebenfalls Null. Aus den Entwicklungen des § 2 ersieht man aber sofort, daß man die Parametergruppe, die zur verkürzten Gruppe gehört, einfach dadurch erhält, daß man $e'_{r-\varrho}, \ldots e'_{r-1}$ wegläßt.

Wir können deshalb folgenden Satz aussprechen:

Satz.

Sind in der durch die r infinitesimalen Transformationen $X_0 f, X_1 f, \ldots X_{r-1} f$ erzeugten r gliedrigen Gruppe die letzten ϱ infinitesimalen Transformationen mit allen vertauschbar, so bilden die auf $e_0', e_1', \ldots e_{r-\varrho-1}'$ bezüglichen Parametersubstitutionen für sich eine $r-\varrho$ gliedrige Gruppe, und diese hat die Zusammensetzung der zur Gruppe gehörigen verkürzten Gruppe.

Betrachtet man die Zusammensetzung aller Typen von Gruppen, deren Gliederzahl $< r$ ist, als bekannt, so ist die verkürzte Gruppe als bekannt anzusehen.

Es würde sich somit als weitere Aufgabe ergeben, alle Gruppen vom Rang Null anzugeben, die derselben verkürzten Gruppe entsprechen.

Nach den Beispielen des § 4 erscheint es wahrscheinlich, daß jede Gruppe vom Rang Null als verkürzte Gruppe angesehen werden kann. Es dürfen hierbei aber die zerlegbaren Gruppen nicht weggelassen werden, die bei der Aufstellung aller Typen von Gruppen weggelassen werden dürfen.

Auch braucht die verkürzte Gruppe einer zerlegbaren Gruppe keineswegs zerlegbar zu sein.

---

§ 1.

Sind

$$X_0 f, X_1 f, \ldots X_{r-1} f$$

r voneinander unabhängige, infinitesimale Transformationen einer r gliedrigen Gruppe, so stehen dieselben in der Beziehung

$$(X_i X_k) = \sum_{s=0}^{r-1} c_{iks} X_s f, \tag{2}$$

wobei die c_{iks} den Gleichungen genügen:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{c} c_{iks} = -c_{kis} \\ \sum_{\varrho=1}^{r} \left(c_{ik\varrho} c_{h\varrho s} + c_{kh\varrho} c_{i\varrho s} + c_{hi\varrho} c_{k\varrho s} \right) = 0 \end{array} \right\}.$$

Man erhält diese Gleichungen aus der Jakobischen Identität:

$$(X_i X_k X_h) = \left((X_i X_k) X_h\right) + \left((X_k X_h) X_i\right) + \left((X_h X_i) X_k\right) \equiv 0.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, alle diejenigen zweigliedrigen Untergruppen der Gruppe G zu bestimmen, in denen eine gegebene infinitesimale Transformation $\sum_{i=0}^{r-1} e_i X_i f$ der Gruppe enthalten ist.

Dies ist nach Lie[1]) immer möglich.

Beschränken wir uns zunächst auf solche zweigliedrige Untergruppen, in denen $\sum_{i=0}^{r-1} e_i X_i f$ nicht die erste Derivierte ist, so kommt unsere Aufgabe auf die folgende hinaus: Alle infinitesimalen Transformationen $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X_k f$ zu bestimmen, für welche die Gleichung besteht:

$$(4) \qquad \left(\sum_{i=0}^{r-1} e_i X_i f, \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X_k f \right) = \omega \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X_k f,$$

wobei ω einen beliebigen Zahlenfaktor bedeutet. Diese Gleichung ergibt zusammen mit (2)

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} e_i \lambda_k \sum_{s=0}^{r-1} c_{iks} X_s f = \omega \sum_{s=0}^{r-1} \lambda_s X_s f,$$

die in die folgenden r Gleichungen zerfällt:

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} e_i \lambda_k c_{iks} = \omega \lambda_s$$

$$s = 0, 1, \ldots r-1.$$

Diese r in $\lambda_0 \ldots \lambda_{r-1}$ linearen und homogenen Gleichungen können

[1]) Bd. 1 S. 590.

aber dann und nur dann für Werte von λ bestehen, die nicht sämtlich 0 sind, wenn die Determinante verschwindet:

$$(5)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{i00} - \omega & \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{i10} & \cdots & \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{ir-10} \\ \sum_{i=0}^{r-i} e_i c_{i01} & \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{i11} - \omega & \cdots & \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{ir-11} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{i0\,r-1} & \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{i1\,r-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{r-1} e_i c_{ir-1\,r-1} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Da Gleichung (5) sicher eine verschwindende Wurzel ω besitzt, wie man sofort sieht, wenn man in (4) $\lambda_k = e_k$ setzt, so erhält Gleichung (5), nach Potenzen von ω entwickelt, folgende Form:

$$(6)\quad \omega^r - \chi_1(e)\,\omega^{r-1} + \chi_2(e)\,\omega^{r-2} - + \cdots \pm \chi_{r-1}(e)\,\omega = 0.$$

Die Gleichung (5) bezw. (6) bezeichnen wir nach Killing als die „charakteristische Gleichung“ einer r gliedrigen Gruppe, und entsprechend die linke Seite von (5) als die charakteristische Determinante Δ einer r gliedrigen Gruppe.

Lassen wir nun obige einschränkende Voraussetzung fallen, d. h. ist $\sum_{i=0}^{r-1} e_i X_i f$ die erste Derivierte einer zweigliedrigen Untergruppe der r gliedrigen Gruppe G, so hat die charakteristische Gleichung $\Delta = 0$ für das Wertsystem $e_0 \ldots e_{r-1}$ lauter verschwindende Wurzeln ω.[1])

Man nennt nun den „Rang“ der Gruppe die Zahl derjenigen unter den Funktionen χ, die untereinander unabhängig sind. Sind alle Funktionen χ Null, so ist die Gruppe vom Rang Null.

Die erzeugenden infinitesimalen Transformationen können dann so gewählt werden, daß die zwischen ihnen bestehenden Relationen die Form erhalten (Umlauf):

---

[1]) Killing, Math. Annalen Bd. 31 S. 270.

$$(1) \qquad (X_i X_k) = \sum_{s=k+1}^{r-1} c_{iks} X_s f$$

$$i = 0, 1 \ldots r-2$$

$$k = i+1, i+2, \ldots r-1.$$

§ 2.

Um die zu einer vorgelegten Gruppe G gehörige Parametergruppe zu finden, führen wir drei bestimmte Substitutionen S(a), S(b), S(c) der Gruppe, die den Parametersystemen

$$a_1, \ldots a_r, b_1 \ldots b_r, c_1 \ldots c_r$$

entsprechen, nacheinander aus.

Sie setzen sich zu einer, der Gruppe G angehörigen Substitution S(s) zusammen, der das Parametersystem $s_1, \ldots s_r$ entspreche.

Symbolisch ausgedrückt: $S(s) = S(a)\,S(b)\,S(c)$.

Wird S(a) und S(b) in ein Produkt

$$S(p) = S(a)\,S(b)$$

und ebenso

$$S(q) = S(b)\,S(c)$$

zusammengefaßt, so daß

$$S(s) = S(p)\,S(c) = S(a)\,S(q),$$

so bestehen die Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} p_\varrho = \varphi_\varrho(a/b) \quad q_\varrho = \varphi_\varrho(b/c) \quad s_\varrho = \varphi_\varrho(p/c) \\ \qquad\qquad s_\varrho = \varphi_\varrho(a/q) \qquad\quad \varrho = 1 \ldots r. \end{cases}$$

Je nachdem man nun a, p, s als Variable und b, c, q als Parameter oder c, q, s als Variable und a, b, p als Parameter auffaßt, bestimmen diese Gleichungen eine Gruppe, die Lie als erste und zweite Parametergruppe bezeichnet.

Die beiden Parametergruppen sind ähnliche und reziproke Gruppen.[1])

---

[1]) Lie-Engel Bd. 1 S. 429.

Um die zu den von Umlauf angegebenen Gruppen vom Rang Null gehörigen Parametergruppen zu finden, wählen wir ein Parametersystem, das Lie[2]) als kanonisch bezeichnet.

Es seien

$$X_\varrho f = \sum_{\nu=0}^{r-1} \xi_{\varrho\nu}(x) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (\varrho = 0, \dots r-1)$$

die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung.

$\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{r-1}$ seien willkürliche, aber feste Werte. Wir bilden die infinitesimale Transformation

$$\lambda_0 X_0 f + \lambda_1 X_1 f + \cdots \lambda_{r-1} X_{r-1} f.$$

Sie erzeugt eine eingliedrige Gruppe, die man durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_\nu'}{dt} = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \lambda_\varrho \xi_{\varrho\nu}(x') \qquad (\nu = 1 \dots n) \tag{9}$$

und die Anfangsbedingungen $x_\nu' = x_\nu$ für $t = 0$ definieren kann.

Nach Ausführung der Integration kommen t und die λ nur in den Verbindungen

$$e_0 = \lambda_0 t,\ e_1 = \lambda_1 t, \dots e_{r-1} = \lambda_{r-1} t \tag{10}$$

vor; behandelt man diese als unabhängig variabel, so stellen die aus (9) entspringenden Integralgleichungen

$$x_\nu' = f_\nu (x_1 \dots x_n / e_0 \dots e_{r-1}) \qquad \nu = 1 \dots n \tag{11}$$

eine r gliedrige Gruppe dar.

Das System der Parameter e bezeichnet nun Lie als kanonisches Parametersystem.

Wir stellen nun folgenden Satz auf:

Satz.

Bei geeigneter Wahl des Parametersystems läßt sich die Parametergruppe, die zu einer r gliedrigen Gruppe vom Rang Null gehört, in der Form darstellen:

---

[2]) Lie-Engel Bd. 1 S. 171.

$$e_\varrho' = e_\varrho + b_\varrho + g_\varrho\,(e_0, e_1 \ldots e_{\varrho-1}, b_0, b_1, \ldots b_{\varrho-1}),$$

wo g_ϱ eine ganze, rationale Funktion der angezeigten Argumente bedeutet.

Beweis.

Die grundlegenden Differentialgleichungen für die Parametergruppe lauten nach der Umformung von L. Maurer[1]):

$$(12)\quad \sum_{i=0}^{r-1} \psi_{si}\,(e_0', e_1', \ldots e_{r-1}')\,de_i' = \sum_{i=0}^{r-1} \psi_{si}\,(b_0, b_1, \ldots b_{r-1})\,db_i.$$

Nun ergeben sich aber bei Benutzung des kanonischen Parametersystems für die Funktionen ψ_{si} die linearen Differentialgleichungen[2])

$$(13)\quad \frac{d\,\Psi_{\sigma\tau}}{dt} = \varepsilon_{\sigma\tau} + \sum_{\varrho=0}^{r-1}\sum_{\iota=0}^{r-1} \lambda_\varrho\, c_{\iota\varrho\sigma}\, \Psi_{\iota\tau},$$

wobei

$$(14)\quad t\cdot\psi_{\sigma\tau}(\lambda_0 t, \lambda_1 t, \ldots \lambda_{r-1} t) = \Psi_{\sigma\tau}(t; \lambda_0, \ldots \lambda_{r-1})$$
$$e_i = \lambda_i t$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(15)\quad \Psi_{\sigma\tau} = 0 \text{ für } t = 0$$
$$\sigma, \tau = 0, 1, \ldots r-1.$$

Nun ist aber für Gruppen vom Rang Null $c_{\iota\varrho\sigma} = 0$, wenn eine der beiden Zahlen ι oder $\varrho \leqq \sigma$ ist.

Wegen dieser für die Konstanten der Zusammensetzung geltenden Gleichungen findet man, wie L. Maurer[3]) gezeigt hat,

$$\Psi_{\sigma\tau} = \binom{\sigma}{\tau}, \text{ wenn } \sigma \leqq \tau \text{ ist.}$$

Ferner findet man, daß die Größen $\psi_{\sigma\tau}$ ganze, rationale Funktionen der Parameter $b_0 \ldots b_\varrho$ sind.

Die Differentialgleichungen (12) erhalten somit die Form

$$(16)\quad de_k' + \sum_{i=0}^{k-1} \psi_{ki}\,(e_0' \ldots e_{r-1}')\,de_i' = db_k + \sum_{i=0}^{k-1} \psi_{ki}\,(b_0 \ldots b_{r-1})\,db_i.$$

---

[1]) Über allgemeinere Invariantensysteme. Münch. Ber. 1888.

[2]) vgl. Enzyklopädie der math. Wiss. Bd. II A. 6 S. 430.

[3]) Math. Annalen Bd. 39, Über kontinuierliche Transformationsgruppen S. 426 u. 432.

Diese lassen sich aber der Reihe nach integrieren und ergeben die e′ als ganze, rationale Funktionen der Größen e und b, und zwar in der Form:

$$(17) \qquad e_\varrho' = e_\varrho + b_\varrho + g_\varrho\left(e_0 \ldots e_{\varrho-1}, b_0 \ldots b_{\varrho-1}\right).$$

Aus dieser Form der Darstellung ergibt sich sofort, daß die inverse Substitution durch die Gleichungen dargestellt ist:

$$(17') \qquad e_\varrho' = e_\varrho - b_\varrho - g_\varrho\left(e_0' \ldots e_{\varrho-1}', -b_0 \ldots -b_{\varrho-1}\right).$$

Nun können wir aber den in der Einleitung erwähnten Satz beweisen:

Satz.

Zu jeder Gruppe vom Rang Null gibt es eine gleichzusammengesetzte, in den Variabeln lineare und homogene Gruppe.

Beweis.

Nach obigem Satz läßt sich die zu einer Gruppe vom Rang Null gehörige Parametergruppe in der Form darstellen:

$$e_\mu' = \varphi_\mu(e/b) \quad \mu = 0 \ldots r - 1,$$

wo φ eine ganze rationale Funktion der angezeigten Argumente bezeichnet.

Nun kann man eine Anzahl ganzer, rationaler Funktionen der Variabeln $e_0 \ldots e_{r-1}$: $g_1(e) \ldots g_n(e)$ so wählen, daß sich jede der Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ als lineare, homogene Funktion von $g_1(e) \ldots g_n(e)$ darstellen läßt mit Koeffizienten, die nur von den Größen b abhängen.

Aus dem Gruppencharakter folgt, daß sich die Funktionen $g_1(e'), \ldots g_n(e')$ ebenfalls als homogene, lineare Funktionen von $g_1(e) \ldots g_n(e)$ darstellen lassen, so daß die Koeffizienten nur von den b abhängen.

Es bestehen also die Gleichungen

$$g_\nu(e') = A_{\nu 1} g_1(e) + A_{\nu 2} g_2(e) + \cdots A_{\nu n} g_n(e)$$
$$\nu = 1 \ldots n,$$

wo $A_{\nu 1}, \ldots A_{\nu n}$ Funktionen der b bedeuten.

Setzt man

$$(A)\quad \begin{cases} F(e/x) = x_1 g_1(e) + x_2 g_2(e) + \cdots + x_n g_n(e) \\ F(e'/y) = y_1 g_1(e') + y_2 g_2(e') + \cdots + y_n g_n(e') \\ F(e/x) = F(e'/y) \\ \quad e_\mu' = \varphi_\mu(e/b) \quad \mu = 1 \ldots n \end{cases}$$

so ist

$$(A')\qquad x_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu\lambda} y_\nu \qquad \lambda = 1 \ldots n.$$

Der Gruppe der rationalen Substitutionen $e_\mu' = \varphi_\mu(e/b)$ entspricht also eine gleichzusammengesetzte Gruppe linearer, homogener Substitutionen $x_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu\lambda} y_\nu$.

Hierbei sind die Größen e als ursprüngliche, e' als neue Variable zu betrachten; die b sind die Parameter der Substitution. Die Größen x sind als Koeffizienten der ursprünglichen Form $F(e/x)$, y als Koeffizienten der transformierten Form $F(e'/y)$ anzusehen.

§ 3.

Wir wollen im folgenden die Rechnungen des vorigen Paragraphen an einem Beispiel durchführen, und zwar für die fünfgliedrige, von Umlauf mit $r = 5$ Fall I bezeichnete Gruppe mit der Zusammensetzung:

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_3;\ (X_0 X_3) = X_4$$
$$(X_1 X_2) = X_4;\quad \text{alle andern } (X_i X_k) = 0.$$

Es ist also

$$c_{012} = c_{023} = c_{034} = c_{124} = 1$$
$$c_{102} = c_{203} = c_{304} = c_{214} = -1$$
$$\text{alle andern } c_{\varrho\sigma\tau} = 0.$$

Aus (13) ergibt sich

1. $$\frac{d\,\Psi_{0\tau}}{dt} = \varepsilon_{0\tau}.$$

Integriert:

Für $\tau = 0$; $\Psi_{00} = t$

$$(18)\quad \psi_{00} = 1.$$

2. $$\frac{d\,\Psi_{1\tau}}{dt} = \varepsilon_{1\tau}.$$

Integriert:

Für $\tau = 0$; $\Psi_{10} = 0$

$\tau = 1$; $\Psi_{11} = t$

$$(19)\quad \begin{cases} \psi_{10} = 0 \\ \psi_{11} = t. \end{cases}$$

3. $$\frac{d\,\Psi_{2\tau}}{dt} = \varepsilon_{2\tau} + \lambda_1\,\Psi_{0\tau} - \lambda_0\,\Psi_{1\tau}.$$

Integriert:

Für $\tau = 0$; $\Psi_{20} = \frac{1}{2}\,\lambda_1\,t^2$

$\tau = 1$; $\Psi_{21} = -\frac{1}{2}\,\lambda_0\,t^2$

$\tau = 2$; $\Psi_{22} = t$

$$(20)\quad \begin{cases} \psi_{20} = \frac{1}{2}\,e_1 \\ \psi_{21} = -\frac{1}{2}\,e_0 \\ \psi_{22} = 1. \end{cases}$$

4. $$\frac{d\,\Psi_{3\tau}}{dt} = \varepsilon_{3\tau} + \lambda_2\,\Psi_{0\tau} - \lambda_0\,\Psi_{2\tau}.$$

Integriert:

Für $\tau = 0$; $\Psi_{30} = \frac{1}{2}\,\lambda_2\,t^2 - \frac{1}{6}\,\lambda_1\,t^3$

$\tau = 1$; $\Psi_{31} = \frac{1}{2}\,\lambda_0{}^2\,t^2$

$\tau = 2$; $\Psi_{32} = -\lambda_0\,t$

$\tau = 3$; $\Psi_{33} = t$

$$(21)\quad \begin{cases} \psi_{30} = \frac{1}{2}\, e_2 - \frac{1}{6}\, e_0\, e_1 \\ \psi_{31} = \frac{1}{6}\, {e_0}^2 \\ \psi_{32} = -\frac{1}{2}\, e_0 \\ \psi_{33} = 1\,. \end{cases}$$

5. $$\frac{d\,\Psi_{4\tau}}{dt} = \varepsilon_{4\tau} + \lambda_3\,\Psi_{0\tau} - \lambda_0\,\Psi_{3\tau} + \lambda_2\,\Psi_{1\tau} - \lambda_1\,\Psi_{2\tau}.$$

Integriert:

Für $\tau = 0$;
$$\Psi_{40} = \frac{1}{2}\lambda_3\, t^2 - \frac{1}{6}\lambda_0\lambda_2\, t^3 + \frac{1}{24}\lambda_0{}^2\lambda_1\, t^4 - \frac{1}{6}\lambda_1{}^2 t^3$$
$$\Psi_{41} = -\frac{1}{24}\lambda_0{}^3 t^4 + \frac{1}{2}\lambda_2\, t^2 + \frac{1}{6}\lambda_0\lambda_1\, t^3$$
$$\Psi_{42} = \frac{1}{6}\lambda_0{}^2 t_3 - \frac{1}{2}\lambda_1\, t^2$$
$$\Psi_{43} = \frac{1}{2}\lambda_0\, t^2$$
$$\Psi_{44} = t$$

$$(22)\quad \begin{cases} \psi_{40} = \frac{1}{2}\, e_3 - \frac{1}{6}\, e_0\, e_2 + \frac{1}{24}\, {e_0}^2\, e_1 - \frac{1}{6}\, {e_1}^2 \\ \psi_{41} = -\frac{1}{24}\, {e_0}^3 + \frac{1}{2}\, e_2 + \frac{1}{6}\, e_0\, e_1 \\ \psi_{42} = \frac{1}{6}\, {e_0}^2 - \frac{1}{2}\, e_1 \\ \psi_{43} = -\frac{1}{2}\, e_0 \\ \psi_{44} = 1\,. \end{cases}$$

Mit diesen Werten für ψ_{ki} ergibt das System der Differentialgleichungen (16):

(23) $$d\,e_0' = d\,b_0\,.$$

(24) $$d\,e_1' = d\,b_1\,.$$

$$(25)\quad \frac{1}{2}\,e_1'\,d\,e_0' - \frac{1}{2}\,e_0'\,d\,e_1' + d\,e_2' = \frac{1}{2}\,b_1\,d\,b_0 - \frac{1}{2}\,b_0\,d\,b_1 + d\,b_2.$$

$$(26)\quad \left(\frac{1}{2}\,e_2' - \frac{1}{6}\,e_0'\,e_1'\right) d\,e_0' + \frac{1}{6}\,e_0'^2\,d\,e_1' - \frac{1}{2}\,e_0'\,d\,e_2' + d\,e_3'$$
$$= \left(\frac{1}{2}\,b_2 - \frac{1}{6}\,b_0\,b_1\right) d\,b_0 + \frac{1}{6}\,b_0^2\,d\,b_1 - \frac{1}{2}\,b_0\,d\,b_2 + d\,b_3.$$

$$(27)\quad \left(\frac{1}{2}\,e_3' - \frac{1}{6}\,e_0'\,e_2' + \frac{1}{24}\,e_0'^2\,e_1' - \frac{1}{6}\,e_1'^2\right) d\,e_0' + \left(-\frac{1}{24}\,e_0'^3 + \frac{1}{2}\,e_2' + \frac{1}{6}\,e_0'\,e_1'\right) d\,e_1'$$
$$+ \left(\frac{1}{6}\,e_0'^2 - \frac{1}{2}\,e_1'\right) d\,e_2' - \frac{1}{2}\,e_0'\,d\,e_3' + d\,e_4'$$
$$= \left(\frac{1}{2}\,b_3 - \frac{1}{6}\,b_0\,b_2 + \frac{1}{24}\,b_0^2\,b_1 - \frac{1}{6}\,b_1^2\right) d\,b_0 + \left(-\frac{1}{24}\,b_0^3 + \frac{1}{2}\,b_2 + \frac{1}{6}\,b_0\,b_1\right) d\,b_1$$
$$+ \left(\frac{1}{6}\,b_0^2 - \frac{1}{2}\,b_1\right) d\,b_2 - \frac{1}{2}\,b_0\,d\,b_3 + d\,b_4.$$

Aus (23) erhält man durch Integration

$$(23)^{\text{int}}\qquad e_0' = e_0 + b_0.$$

Ebenso aus (24)

$$(24)^{\text{int}}\qquad e_1' = e_1 + b_1.$$

Setzt man diese Werte für e_0' und e_1' in (25) ein und ordnet, so ergibt sich

$$(25')\qquad \frac{1}{2}\,e_1\,d\,b_0 - \frac{1}{2}\,e_0\,d\,b_1 + d\,e_2' = d\,b_2.$$

Durch Integration

$$(25)^{\text{int}}\qquad e_2' = e_2 - \frac{1}{2}\,b_0\,e_1 + \frac{1}{2}\,b_1\,e_0 + b_2.$$

Ebenso erhält man aus (26)

$$(26')\quad \left(\frac{1}{2}\,e_0\,b_1 - \frac{1}{6}\,e_1\,b_0 + \frac{1}{2}\,e_2 - \frac{1}{12}\,e_0\,e_1\right) d\,b_0$$
$$+ \left(\frac{1}{12}\,e_0\,b_0 - \frac{1}{12}\,e_0^2\right) d\,b_1 - \frac{1}{2}\,e_0\,d\,b_2 + d\,e_3' - d\,b_3 = 0.$$

Integriert:

$$(26)^{\text{int}} \quad e_3' = e_3 - \frac{1}{2} b_0 e_2 - \frac{1}{12} b_0 e_0 e_1 + \frac{1}{12} b_0^2 e_1 + \frac{1}{12} b_1 e_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) e_0 + b_3 .$$

Endlich ergibt (27)

$$\left(\frac{1}{12} e_0 b_2 + \left(\frac{1}{24} e_0^2 - \frac{1}{12} e_1\right) b_1 + \left(-\frac{1}{6} e_2 - \frac{1}{12} e_0 e_1\right) b_0 + \frac{1}{2} e_3 + \frac{1}{12} e_0 e_2 + \frac{1}{6} e_1^2\right) d b_0$$
$$+ \left(\frac{1}{6} e_0 b_1 + \left(\frac{1}{24} e_0^2 b_0 - \frac{1}{12} e_1 b_0\right) + \left(\frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{12} e_0 e_1\right)\right) d b_1$$
$$+ \left(\frac{1}{12} e_0 b_0 + \left(-\frac{1}{12} e_0^2 - \frac{1}{2} e_1\right)\right) d b_2 - \frac{1}{2} e_0 d b_3 + d e_4' - d b_4 = 0.$$

Integriert:

$$(27)^{\text{int}} \quad e_4' = e_4 - \frac{1}{2} b_0 e_3 - \frac{1}{12} b_0 e_0 e_2 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 - \frac{1}{2} b_1\right) e_2$$
$$- \frac{1}{12} b_0 e_1^2 + \left(\frac{1}{12} b_1 + \frac{1}{24} b_0^2\right) e_0 e_1$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) e_1 + \left(\frac{1}{12} b_2 - \frac{1}{24} b_0 b_1\right) e_0^2$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2 - \frac{1}{12} b_1^2\right) e_0 + b_4 .$$

§ 4.

Bei wachsendem r werden die Rechnungen gleich erheblich umständlicher; wir wollen uns deshalb darauf beschränken, die Resultate bis $r = 6$ im folgenden zusammenzustellen. Hierbei wollen wir uns der Umlaufschen Numerierung bedienen; wir setzen ferner die von Umlauf angegebene Zusammensetzung der betreffenden Gruppe bei, lassen aber dabei diejenigen $(X_i X_k)$ weg, die gleich Null sind.

r = 2.

$$(X_0 X_1) = 0$$
$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1.$$

r = 3.

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1.$$

$(X_0 X_1) = X_2.$	alle $(X_i X_k) = 0.$
I. $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2.$	II. $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 + b_2.$
1 ausgezeichnete Transformation $X_2 f$.	3 ausgezeichnete Transformationen.

$r = 4$.

Nach $r = 3$ Fall I.

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2.$$

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_3.$$

$$\text{I.}\quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_3.$$

1 ausgezeichnete Transformation $X_3 f$.

$$(X_0 X_1) = X_2.$$
$$\text{II.}\quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + b_3.$$

2 ausgezeichnete Transformationen $X_2 f$ und $X_3 f$.

Nach $r = 3$ Fall II.

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 + b_2$$
$$\text{alle } (X_i X_k) = 0$$
$$\text{III.}\quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + b_3.$$

4 ausgezeichnete Transformationen.

r = 5.

1. Nach r = 4 Fall I.

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + \mathrm{b}_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathrm{b}_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathrm{b}_1\mathbf{e}_0 + \mathrm{b}_2$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_2 - \frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + \frac{1}{12}\mathrm{b}_0^2\mathbf{e}_1 + \frac{1}{12}\mathrm{b}_1\mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{b}_2 - \frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathrm{b}_1\right)\mathbf{e}_0 + \mathrm{b}_3.$$

1 ausgezeichnete Transformation X_4 f.

$$(\mathrm{X}_0\mathrm{X}_1) = \mathrm{X}_2;\ (\mathrm{X}_0\mathrm{X}_2) = \mathrm{X}_3;\ (\mathrm{X}_0\mathrm{X}_3) = \mathrm{X}_4;\ (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) = \mathrm{X}_4.$$

$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_3 - \frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{12}\mathrm{b}_0^2 - \frac{1}{2}\mathrm{b}_1\right)\mathbf{e}_2$$

I. $$-\frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_1^2 + \left(\frac{1}{12}\mathrm{b}_1 + \frac{1}{24}\mathrm{b}_0^2\right)\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{b}_2 + \frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathrm{b}_1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12}\mathrm{b}_2 - \frac{1}{24}\mathrm{b}_0\mathrm{b}_1\right)\mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{b}_3 - \frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathrm{b}_2 - \frac{1}{12}\mathrm{b}_1^2\right)\mathbf{e}_0 + \mathrm{b}_4.$$

$$(\mathrm{X}_0\mathrm{X}_1) = \mathrm{X}_2;\ (\mathrm{X}_0\mathrm{X}_2) = \mathrm{X}_3;\ (\mathrm{X}_0\mathrm{X}_3) = \mathrm{X}_4.$$

II. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_3 - \frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 + \frac{1}{12}\mathrm{b}_0^2\mathbf{e}_2 + \frac{1}{24}\mathrm{b}_0^2\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12}\mathrm{b}_2 - \frac{1}{24}\mathrm{b}_0\mathrm{b}_1\right)\mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{b}_3 - \frac{1}{12}\mathrm{b}_0\mathrm{b}_2\right)\mathbf{e}_0 + \mathrm{b}_4.$$

2 ausgezeichnete Transformationen $X_3 f$ und $X_4 f$.

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_3;\ (X_1 X_2) = X_4.$$

V. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e}_0 + b_4.$$

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_3.$$

VI. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 + b_4.$$

2. Nach $r = 4$ Fall II.

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + b_3.$$

1 ausgezeichnete Transformation $X_4 f$.

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_4;\ X_1 X_3 = X_4.$$

III. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 + \frac{1}{2} b_3\right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_4.$$

2 ausgezeichnete Transformationen $X_3 f$ und $X_4 f$.

$$(X_0 X_1) = X_3;\ (X_0 X_2) = X_4.$$

VII. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} b_2 e_0 + b_4.$$

Die $\mathbf{e}_2$ und b_2 sind oben mit $\mathbf{e}_3$ und b_3 zu vertauschen.

3 ausgezeichnete Transformationen X_2, X_3, X_4.

$$(X_0 X_1) = X_2.$$

VIII. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 + b_4.$$

3. Nach $r = 4$ Fall III.

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 + b_2$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + b_3.$$

1 ausgezeichnete Transformation $X_4 f$.

$$(X_0 X_2) = X_4;\ (X_1 X_3) = X_4.$$

IV. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_4.$$

5 ausgezeichnete Transformationen.

IX. $$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 + b_4.$$

r = 6.

Nach r = 5 Fall I.

$$(X_0\,X_1) = X_2;\ (X_0\,X_2) = X_3;\ (X_0\,X_3) = X_4;\ (X_1\,X_2) = X_4.$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\,b_0\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\,b_1\,\mathbf{e}_0 + b_2$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2}\,b_0\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{12}\,b_0\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{12}\,b_0^2\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{12}\,b_1\,\mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2}\,b_2 - \frac{1}{12}\,b_0\,b_1\right)\mathbf{e}_0 + b_3$$

$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2}\,b_0\,\mathbf{e}_3 - \frac{1}{12}\,b_0\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{12}\,b_0^2 - \frac{1}{2}\,b_1\right)\mathbf{e}_2 - \frac{1}{12}\,b_0\,\mathbf{e}_1^2 + \left(\frac{1}{12}\,b_1 + \frac{1}{24}\,b_0^2\right)\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2}\,b_2 + \frac{1}{12}\,b_0\,b_1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12}\,b_2 - \frac{1}{24}\,b_0\,b_1\right)\mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2}\,b_3 - \frac{1}{12}\,b_0\,b_2 - \frac{1}{12}\,b_1^2\right)\mathbf{e}_0 + b_4.$$

1. 1 ausgezeichnete Transformation $X_5 f$.

$$(X_0 X_4) = X_5;\ (X_1 X_3) = X_5.$$

$$\begin{aligned}
1.\ \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 - \frac{1}{2} b_1\right) \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\
&+ \left(\frac{1}{24} b_0^2 - \frac{1}{12} b_1\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{6} b_0 b_1 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{24} b_0^2 \mathbf{e}_1^2 \\
&+ \frac{1}{720} b_0 \mathbf{e}_0^3 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{180} b_0^2 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{6} b_2 - \frac{1}{180} b_0^3\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \\
&- \left(\frac{1}{12} b_0 b_2 + \frac{1}{720} b_0^4 - \frac{1}{2} b_3\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{720} b_1 \mathbf{e}_0^4 \\
&- \frac{1}{180} b_0 b_1 \mathbf{e}_0^3 \\
&+ \left(\frac{1}{12} b_3 - \frac{1}{24} b_0 b_2 - \frac{1}{24} b_1^2 + \frac{1}{180} b_0^2 b_1\right) \mathbf{e}_0^2 \\
&+ \left(\frac{1}{2} b_4 - \frac{1}{12} b_0 b_3 + \frac{1}{720} b_0^3 b_1 - \frac{1}{12} b_1 b_2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.
\end{aligned}$$

$$(X_1 X_4) = X_5;\ (X_2 X_3) = -X_5.$$

$$\begin{aligned}
2.\ \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{6} b_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_3 \\
&+ \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_2^2 - \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{24} b_0 b_1 - \frac{1}{12} b_2\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 \\
&- \left(\frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{24} b_1^2 + \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{720} b_0 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1^2 \\
&+ \frac{1}{120} b_0^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^2 + \left(\frac{1}{360} b_0^3 + \frac{1}{24} b_0 b_1 + \frac{1}{12} b_2\right) \mathbf{e}_1^2 \\
&- \frac{1}{720} b_1 \mathbf{e}_0^3 \mathbf{e}_1 - \frac{1}{90} b_0 b_1 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1 \\
&+ \left(\frac{1}{12} b_3 - \frac{1}{24} b_1^2 - \frac{1}{24} b_0 b_2 - \frac{1}{90} b_0^2 b_1\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \\
&+ \left(\frac{1}{12} b_0 b_3 - \frac{1}{720} b_0^3 b_1 - \frac{1}{12} b_1 b_2 + \frac{1}{2} b_4\right) \mathbf{e}_1 \\
&+ \frac{1}{360} b_1^2 \mathbf{e}_0^3 + \frac{1}{120} b_0 b_1^2 \mathbf{e}_0^2 \\
&+ \left(\frac{1}{720} b_0^2 b_1^2 - \frac{1}{6} b_1 b_3 + \frac{1}{12} b_2^2\right) \mathbf{e}_0 + b
\end{aligned}$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$.

$$(X_1 X_2) = X_4 + X_5.$$

1. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e}_0 + b_5.$$

2. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 + b_5.$$

Nach $r = 5$ Fall II.

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_3;\ (X_0 X_3) = X_4.$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_3$$

$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{24} b_0^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_2 - \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_0 + b_4.$$

1. 1 ausgezeichnete Transformation X_5 f.

$$(X_0\,X_4) = X_5;\ (X_1\,X_2) = X_5.$$

3.
$$\begin{aligned}\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2}b_0\mathbf{e}_4 - \frac{1}{2}b_0\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3 + \frac{1}{12}b_0^2\mathbf{e}_3 + \frac{1}{24}b_0^2\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2\\ &- \frac{1}{2}b_1\mathbf{e}_2 - \frac{1}{12}b_0\mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{720}b_0\mathbf{e}_0^3\mathbf{e}_1 + \frac{1}{180}b_0^2\mathbf{e}_0^2\mathbf{e}_1\\ &+ \frac{1}{12}b_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12}b_0b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{720}b_0^4\right)\mathbf{e}_1\\ &- \frac{1}{720}b_1\mathbf{e}_0^4 - \frac{1}{180}b_0b_1\mathbf{e}_0^3\\ &+ \left(\frac{1}{12}b_3 + \frac{1}{180}b_0^2b_1 - \frac{1}{24}b_0b_2\right)\mathbf{e}_0^2\\ &+ \left(\frac{1}{720}b_0^3b_1 - \frac{1}{12}b_0b_3 + \frac{1}{2}b_4\right)\mathbf{e}_0 + b_5\end{aligned}$$

$$(X_0\,X_4) = X_5.$$

4.
$$\begin{aligned}\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2}b_0\mathbf{e}_4 - \frac{1}{12}b_0\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3 + \frac{1}{12}b_0^2\mathbf{e}_3 + \frac{1}{24}b_0^2\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2\\ &+ \frac{1}{720}b_0\mathbf{e}_0^3\mathbf{e}_1 + \frac{1}{180}b_0^2\mathbf{e}_0^2\mathbf{e}_1 - \frac{1}{720}b_0^4\mathbf{e}_1\\ &- \frac{1}{720}b_1\mathbf{e}_0^4 - \frac{1}{180}b_0b_1\mathbf{e}_0^3\\ &+ \left(\frac{1}{12}b_3 + \frac{1}{180}b_0^2b_1 - \frac{1}{24}b_0b_2\right)\mathbf{e}_0^2\\ &+ \left(\frac{1}{720}b_0^3b_1 - \frac{1}{12}b_0b_3 + \frac{1}{2}b_4\right)\mathbf{e}_0 + b_5.\end{aligned}$$

$$(X_1 X_4) = X_5;\ (X_2 X_3) = -X_5.$$

5. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_4 + \frac{1}{12} b_0 b_1 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{6} b_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3$$
$$- \left(\frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_2^2$$
$$+ \left(\frac{1}{24} b_0 b_1 - \frac{1}{12} b_2\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2$$
$$+ \left(\frac{1}{12} b_0 b_3 - \frac{1}{720} b_0^3 b_1 + \frac{1}{2} b_4\right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{360} b_0^3 \mathbf{e}_1^2$$
$$+ \frac{1}{120} b_0^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{720} b_0 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1^2 - \frac{1}{720} b_1 \mathbf{e}_0^3 \mathbf{e}_1$$
$$- \frac{1}{90} b_0 b_1 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_3 - \frac{1}{24} b_0 b_2 - \frac{1}{90} b_0^2 b_1\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1$$
$$+ \frac{1}{360} b_1^2 \mathbf{e}_0^3 + \frac{1}{120} b_0 b_1^2 \mathbf{e}_0^2$$
$$+ \left(\frac{1}{720} b_0^2 b_1^2 - \frac{1}{6} b_1 b_3 + \frac{1}{12} b_2^2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$.

$$(X_1 X_2) = X_5.$$

3. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e}_0 + b_5.$$

4. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 + b_5.$$

Nach $r = 5$ Fall III.

$$(X_0 X_1) = X_2;\ X_0 X_2) = X_4;\ (X_1 X_3) = X_4.$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + b_3$$

$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 + \frac{1}{2} b_3\right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_4.$$

1. 1 ausgezeichnete Transformation X_5 f.

$$(X_0 X_4) = X_5;\ (X_2 X_3) = X_5.$$

10. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_4 + \left(\frac{1}{12} b_0 b_1 - \frac{1}{2} b_2\right) \mathbf{e}_3 + \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{6} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3 + \left(\frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{12} b_0^2\right) \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{6} b_0 b_3 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_3 + \frac{1}{24} b_0^2\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_4 + \frac{1}{12} b_1 b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_0 + \left(\frac{1}{12} b_2 - \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0^2 + b_5.$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen X_4 f und X_5 f.

$$(X_0 X_3) = X_5;\ (X_1 X_3) = X_4 + \delta X_5;\ (X_1 X_2) = X_5.$$

5. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \left(\frac{1}{2} b_0^2 + \frac{1}{2} \delta b_1\right) \mathbf{e}_3 + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{2} \delta b_3 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_1^2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.$$

$$(X_0\,X_3) = X_5;\ (X_1\,X_3) = X_4 + X_5.$$

6. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \left(\frac{1}{2}\,b_0 + \frac{1}{2}\,b_1\right)\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\,b_3\,\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\,b_3\,\mathbf{e}_0 + b_5.$$

$$(X_0\,X_3) = X_5.$$

7. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2}\,b_0\,\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\,b_3\,\mathbf{e}_0 + b_5.$$

$$(X_1\,X_2) = X_5.$$

8. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2}\,b_1\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{12}\,b_0\,\mathbf{e}_1^{\,2} + \frac{1}{12}\,b_1\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2}\,b_2 + \frac{1}{12}\,b_0\,b_1\right)\mathbf{e}_1 - \frac{1}{12}\,b_1^{\,2}\,\mathbf{e}_0 + b_5.$$

$$(X_1\,X_3) = X_4 + X_5.$$

9. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2}\,b_1\,\mathbf{e}_3 + \frac{1}{2}\,b_3\,\mathbf{e}_1 + b_5.$$

$$(X_1\,X_2) = X_5;\ (X_1\,X_3) = X_4 + X_5.$$

10. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2}\,b_1\,\mathbf{e}_3 - \frac{1}{2}\,b_1\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{12}\,b_0\,\mathbf{e}_1^{\,2} + \frac{1}{12}\,b_1\,\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2}\,b_3 + \frac{1}{2}\,b_2 + \frac{1}{12}\,b_0\,b_1\right)\mathbf{e}_1 - \frac{1}{12}\,b_1^{\,2}\,\mathbf{e}_0 + b_5.$$

11. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 + b_5.$$

Nach $r = 5$ Fall IV.

$$(X_0 X_1) = X_4;\ (X_2 X_3) = X_4.$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 + b_2$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + b_3$$
$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_4.$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$.

$$(X_0 X_3) = X_5;\ (X_2 X_3) = X_4 + A X_5;\ (X_1 X_2) = \delta X_5.$$

12. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 + \left(-\frac{1}{2} b_0 - \frac{1}{2} A b_2\right) \mathbf{e}_3 + \left(-\frac{1}{2} \delta b_1 + \frac{1}{2} A b_3\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \delta b_2 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e}_0 + b_5.$$

$$(X_1 X_2) = X_5;\ (X_2 X_3) = X_4 + A X_5.$$

13. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} A b_2 \mathbf{e}_3 + \left(\frac{1}{2} A b_3 - \frac{1}{2} b_1\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_1 + b_5.$$

$$(X_0 X_2) = X_5;\ (X_1 X_3) = \varepsilon X_5;\ (X_2 X_3) = X_4 + A X_5.$$

14. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon b_1 + \frac{1}{2} A b_2\right) \mathbf{e}_3 + \left(\frac{1}{2} A b_3 - \frac{1}{2} b_0\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \varepsilon b_3 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_0 + b_5.$$

$$(X_1 X_3) = X_5;\ (X_2 X_3) = X_4 + A X_5.$$

15. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \left(\frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} A b_2\right) \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} A b_3 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e}_1 + b_5.$$

$$(X_2 X_3) = X_4 + A X_5.$$

16. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} A b_2 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} A b_3 \mathbf{e}_2 + b_5.$$

Nach $r = 5$, Fall V.

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_3;\ (X_1 X_2) = X_4.$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_3$$

$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e}_0 + b_4.$$

1. 1 ausgezeichnete Transformation X_5 f.

$$(X_0 X_3) = X_5;\ (X_1 X_4) = X_5.$$

6. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 + \frac{1}{12} b_1^2\right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{12} b_2 + \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1^2 + \left(\frac{1}{24} b_0^2 - \frac{1}{24} b_1^2\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_4 - \frac{1}{12} b_1 b_2\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_2 - \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.$$

$$(X_0 X_4) = X_5;\ (X_1 X_3) = X_5.$$

7. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2$$
$$+ \frac{1}{6} b_0 b_1 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{24} b_0^2 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{6} b_2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{24} b_1^2 \mathbf{e}_0^2$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_4 - \frac{1}{12} b_1 b_2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$.

$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_2) = X_4;\ (X_1 X_2) = X_3;\ (X_1 X_3) = X_5.$

$\mathbf{e}_4'$ und $\mathbf{e}_3'$ vert.

17. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e}_2$$
$$+ \left(\frac{1}{12} b_2 + \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1^2 - \frac{1}{24} b_1^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_1 b_2\right) \mathbf{e}_1 + b_5.$$

3. 3 ausgezeichnete Transformationen $X_3 f$, $X_4 f$, $X_5 f$.

1. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 + b_5.$$

Nach $r = 5$, Fall VI.

$$(X_0 X_1) = X_2;\ (X_0 X_3) = X_3.$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_3$$
$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 + b_4.$$

1. 1 ausgezeichnete Transformation $X_5 f$.

$$(X_0 X_3) = X_5;\ (X_1 X_2) = X_5;\ (X_1 X_4) = X_5.$$

$$\begin{aligned}8.\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 - \frac{1}{2} b_1\right) \mathbf{e}_2 \\ &- \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \left(\frac{1}{24} b_0^2 + \frac{1}{12} b_1\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \\ &+ \left(\frac{1}{12} b_0 b_1 + \frac{1}{2} b_4 + \frac{1}{2} b_2\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_2 - \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2 - \frac{1}{12} b_1^2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.\end{aligned}$$

$$(X_0 X_3) = X_5;\ (X_1 X_4) = X_5.$$

$$\begin{aligned}9.\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_2 \\ &+ \frac{1}{24} b_0^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_4 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_2 - \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.\end{aligned}$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$.

$$(X_0 X_3) = (X_1 X_2) = X_5.$$

$$\begin{aligned}21.\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 - \frac{1}{2} b_1\right) \mathbf{e}_2 \\ &- \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \left(\frac{1}{24} b_0^2 + \frac{1}{12} b_1\right) \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \\ &+ \left(\frac{1}{12} b_0 b_1 + \frac{1}{2} b_2\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_2 - \frac{1}{24} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_2 - \frac{1}{12} b_1^2\right) \mathbf{e}_0 + b_5.\end{aligned}$$

$$(X_1 X_2) = (X_1 X_3) = X_5.$$

$$\begin{aligned}22.\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 &- \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \\ &+ \left(\frac{1}{12} b_0 b_1 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{2} b_3\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e}_0 + b_5.\end{aligned}$$

$$(X_1 X_3) = X_5 .$$

23. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e}_1 + b_5 .$$

$$(X_0 X_3) = (X_1 X_2) = X_5 .$$

24. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_1^2\right) \mathbf{e}_0 + b_5 .$$

$$(X_0 X_3) = X_5 .$$

25. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e}_0 + b_5 .$$

Bei 22 bis 25 ist oben der Index 3 mit dem Index 4 zu vertauschen.

3. 3 ausgezeichnete Transformationen $X_3 f$, $X_4 f$, $X_5 f$.

2. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 + b_5 .$$

Nach $r = 5$, Fall VII.

$$(X_0 X_1) = X_3 ; \; (X_0 X_2) = X_4 .$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 + b_2$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_3$$

$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_0 + b_4 .$$

1. 1 ausgezeichnete Transformation $X_5 f$.

$$(X_0 X_3) = (X_2 X_4) = X_5 .$$

12. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_2^2 + \frac{1}{12} b_2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_4 + \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_1$$
$$+ \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_2^2 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_5 .$$

$$(X_1 X_3) = (X_2 X_4) = X_5 .$$

13. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_2^2 + \frac{1}{12} b_2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_4 + \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1$$
$$+ \left(\frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 + \left(-\frac{1}{12} b_1^2 - \frac{1}{12} b_2^2\right) \mathbf{e}_0$$

$$(X_1 X_4) = (X_2 X_3) = X_5 .$$

14. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{6} b_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2$$
$$+ \left(\frac{1}{12} b_0 b_1 + \frac{1}{2} b_3\right) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{12} b_2 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1$$
$$+ \left(\frac{1}{12} b_0 b_2 + \frac{1}{2} b_4\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{6} b_1 b_2 \mathbf{e}_0 + b_5 .$$

$$(X_0 X_4) = (X_1 X_3) = X_5 .$$

15. $$\mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_4 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_2$$
$$- \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1$$
$$+ \frac{1}{12} b_2 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_4 - \frac{1}{12} b_1^2 - \frac{1}{12} b_0 b_2\right) \mathbf{e}_0 + b_5 .$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$.

$$(X_0 X_3) = \pm (X_1 X_2) = X_5 .$$

$$\mathbf{18.}\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 \mp \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{12} b_0^2 \pm \frac{1}{2} b_2\right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}^0 + b_5 .$$

$$(X_1 X_3) = X_5 .$$

$$\mathbf{19.}\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_1^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_1 - \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e}_0 + b_5 .$$

$$(X_0 X_3) = X_5 .$$

$$\mathbf{20.}\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_0^2 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e}_0^2 + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e}_0 + b_5 .$$

3. 3 ausgezeichnete Transformationen $X_3 f$, $X_4 f$, $X_5 f$.

$$(X_1 X_2) = X_5 .$$

$$\mathbf{3.}\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e}_1 + b_5 .$$

$$\mathbf{4.}\quad \mathbf{e}_5' = \mathbf{e}_5 + b_5 .$$

Nach $r = 5$, Fall VIII.

$$(X_0 X_1) = X_2 .$$

$$\mathbf{e}_0' = \mathbf{e}_0 + b_0$$
$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + b_1$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e}_0 + b_2$$
$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + b_3$$
$$\mathbf{e}_4' = \mathbf{e}_4 + b_4 .$$

1. 1 ausgezeichnete Transformation $X_5 f$.

$$(X_1 X_2) = (X_3 X_4) = X_5.$$

11. $$\mathbf{e_5}' = \mathbf{e_5} - \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e_4} + \frac{1}{2} b_4 \mathbf{e_3} - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e_2} + \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e_1}^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e_0} \mathbf{e_1} + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e_1} - \frac{1}{12} b_1^2 \mathbf{e_0} + b_5.$$

2. 2 ausgezeichnete Transformationen $X_4 f$ und $X_5 f$.

$$(X_2 X_3) = X_5.$$

26. $$\mathbf{e_5}' = \mathbf{e_5} - \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e_3} + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e_2} + b_5.$$

$$(X_0 X_3) = (X_1 X_2) = X_5.$$

27. $$\mathbf{e_5}' = \mathbf{e_5} - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e_3} - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e_2} - \frac{1}{12} b_0 \mathbf{e_1}^2 + \frac{1}{12} b_1 \mathbf{e_0} \mathbf{e_1} + \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{12} b_0 b_1\right) \mathbf{e_1} + \left(\frac{1}{2} b_3 - \frac{1}{12} b_1^2\right) \mathbf{e_0} + b_5.$$

$$(X_0 X_2) = (X_1 X_3) = X_5.$$

28. $$\mathbf{e_5}' = \mathbf{e_5} - \frac{1}{2} b_1 \mathbf{e_3} - \frac{1}{2} b_0 \mathbf{e_2} + \frac{1}{2} b_3 \mathbf{e_1} + \frac{1}{2} b_2 \mathbf{e_0} + b_5.$$

Bei 26 und 28 sind oben die Indizes 2 und 4 zu vertauschen.

4. 4 ausgezeichnete Transformationen $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$, $X_5 f$.

1. $$\mathbf{e_5}' = \mathbf{e_5} + b_5.$$

Nach $r = 5$, Fall IX.

6. Lauter ausgezeichnete Transformationen.

$$\mathbf{e_0}' = \mathbf{e_0} + b_0$$
$$\mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1} + b_1$$
$$\mathbf{e_2}' = \mathbf{e_2} + b_2$$
$$\mathbf{e_3}' = \mathbf{e_3} + b_3$$
$$\mathbf{e_4}' = \mathbf{e_4} + b_4.$$

1. $$\mathbf{e_5}' = \mathbf{e_5} + b_5.$$

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.